

DS n°4 (durée : 1h30)

Le cheminement de votre pensée doit être apparent (autrement dit : il faut justifier ses réponses ;). Le barème est donné à titre indicatif, et des points seront attribués pour la présentation et la rédaction de la copie ; En particulier, mettez vos résultats en valeur, par exemple en les soulignant d'une autre couleur ou en les encadrant.

Les calculatrices et documents de tout type sont interdits. Le sujet doit être rendu avec la copie. Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont potentiellement plus difficiles que les autres.

Exercice 1 (4 pts). Questions de cours

- Donner les définitions précises d'une suite arithmétique, géométrique et arithmético-géométrique (une définition mathématique ainsi qu'une phrase explicative sont attendues).
- Soit l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$. Démontrer que les solutions s'écrivent sous la forme $k \exp(-A(x))$, où A est une primitive de a et k une constante.
- Soit l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = e^{2x}$. Sous quelle forme faudrait-il chercher une solution particulière, et pourquoi ? (*On ne demande pas de résoudre l'équation*)

Exercice 2 (5 pts).

- Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + 2y = -2x - 1.$$

On écrira les solutions de l'équation homogène de deux manières distinctes.

- Résoudre l'équation

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Exercice 3 (2 pts). Déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou non, puis donner leur limite éventuelle.

- $u_n = 3 + \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.
- $u_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{2}{e^n}\right)$

Exercice 4 (4 points). On considère un carré de longueur 1. On le partage en 9 carrés égaux, et on colorie le carré central. Puis, pour chaque carré non-colorié, on réitère le procédé. On note u_n l'aire coloriée après l'étape n .

- Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence suivante : $u_{n+1} = \frac{8}{9}u_n + \frac{1}{9}$. Comment appelle-t-on ce type de suite ?
- Soit (v_n) une suite dont le terme général est défini par $v_n = u_n - 1$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison.
- En déduire une écriture explicite de (u_n) . Quelle est la limite de (u_n) ? Interpréter.
- Déterminer le rang à partir duquel $u_n \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 5 (2 points). Soient deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ de termes généraux

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) forment un couple de suites adjacentes, et conclure.

Exercice 6 (* 4 points). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1$.
2. Démontrer que la suite est monotone, et en déduire qu'elle est convergente.
3. Résoudre l'équation $u_{n+1} = u_n$, puis déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 7 (Bonus). Qui es-tu ?